Серия 1: хчл

1. Учитель выдал Диме и Сереже по квадратному трехчлену, написал на доске четыре числа и предложил каждому из учеников подставить эти четыре числа в свой квадратный трехчлен. У Сережи получились значения 1, 3, 5 и 7. А Дима успел подставить только первые три числа и получил 17, 15 и 13. Когда же Дима собрался подставить четвертое число, оказалось, что учитель уже стер числа с доски. Какое у него получилось бы значение, если бы он успел подставить четвертое число? (Ответ должен быть конкретным числом).

2. На доске написаны 100 чисел из интервала $(0, 1)$. Разрешается выбрать два числа a и b и заменить их на два корня квадратного трехчлена $x^2 - ax + b$ (если этот трехчлен имеет два корня). Докажите, что этот процесс не может продолжаться бесконечно долго.

3. Дан квадратный трехчлен $f(x)$, старший коэффициент которого равен -1. Известно, что существует такая пара различных чисел u и v, что $f(u) = -v^2$ и $f(v) = -u^2$. Докажите, что существует бесконечно много пар чисел с таким свойством.

4. Квадратный трехчлен меняет местами пару различных чисел a и b (т.е. $f(a) = b$ и $f(b) = a$). Докажите, что он не меняет местами никакую другую пару различных чисел.

5. Дан квадратный трехчлен $f(x) = x^2 + px + q$, где $p, q \geqslant 0$, имеющий два различных вещественных корня. Натуральные числа a и b таковы, что $f(a) < f(b) < 1{,}001 f(a)$. Докажите, что $f(b) - f(a) > 4001$.

6. а) Существует ли такой квадратный трехчлен $f(x)$ с целыми коэффициентами, что $f(f(\sqrt{2})) = 0$?

б) Для какого наибольшего натурального n, не превосходящего 2023, найдется такой квадратный трехчлен $f(x)$ с целыми коэффициентами, что $f\big(f(\sqrt{n})\big) = 0$?

7. Квадратный трехчлен $2ax^2 + bx + c$ с положительным старшим коэффициентом таков, что каждая из прямых $y = ax + b, y = bx + a, y = bx + c, y = cx + b, y = ax + c, y = cx + a$ пересекает его график не более чем в одной точке. Какое максимальное значение может принимать величина $\frac{c}{a}$?

8. Существует ли такой квадратный трехчлен $f(x)$ с вещественными коэффициентами, что каждое из уравнений $f(x) = f(6x - 1)$, $f(t) = f(3 - 15t)$ имеет (хотя бы одно) целочисленное решение?