Серия 4: уверение Фомы.

1. a, b, c, d – натуральные числа, $ab = cd$. Докажите, что существуют натуральные числа u_1, v_1, u_2, v_2, для которых $a = u_1v_1$, $b = u_2v_2$, $c = u_1u_2$, $d = v_1v_2$.

2. а) Докажите, что количество делителей вида $4k + 1$ у любого натурального числа не меньше количества делителей вида $4k + 3$.

б) Для каких натуральных чисел имеет место равенство?

3. Пусть a_1, a_2, a_3, $\ldots$– бесконечная возрастающая последовательность натуральных чисел. Докажите, что существует бесконечно много m, для которых можно найти такие натуральные x, y, h, k, что $0 < h < k < m$ и $a_m = xa_h + ya_k$.

4. Натуральные числа a, b, c, d, n таковы, что $ab - cd - 1$ делится на n. Докажите, что можно найти числа a', b', c', d', для которых $a - a'$, $b - b'$, $c - c'$, $d - d'$ делятся на n и $a'b' - c'd' = 1$.

5. Даны два взаимно простых числа a и b. Известно, что всякое целое число можно представить в виде $ax + by$, где x и y – целые. Рассмотрим множество M целых чисел, которые представимы в виде $ax + by$, где x и y – целые неотрицательные числа. Докажите, что некоторое число c обладает следующим свойством: из двух чисел n и $c - n$ (где n – любое целое) одно принадлежит M, а другое нет.

6. (А.Туэ (1863-1922)). Пусть $n > 1$ – натуральное число. Тогда для каждого натурального a, взаимно простого с n, существуют такие натуральные $x \leqslant \sqrt{n}$, $y \leqslant \sqrt{n}$, что $ay \equiv \pm x \pmod{n}$.

7. Найдите все натуральные n, большие 1 и такие, что если $ab + 1$ делится на n для каких-то натуральных чисел a и b, то и $a + b$ тоже делится на n.

8. Натуральные n, m, k таковы, что числа $5^n - 2$ и $2^k - 5$ делятся на $5^m - 2^m$. Докажите, что n и m взаимно просты.