

Серия 1, как ни странно, в основном про квадратный трёхчлен.

1. Число 76 обладает следующим свойством: последние две цифры числа $76^2 = 5776$ дают снова 76. Существует ли бесконечная последовательность цифр a_0, a_1, a_2, \dots такая, что для любого n квадрат записываемого ими числа $\overline{a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0}$ оканчивается цифрами $\overline{\dots a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0}$? (Очевидные ответы $a_0 = 0$ или 1 , $a_i = 0$ при $i > 1$ исключаем). Проведите полное исследование.
2. Число $7n$ представляется в виде $7n = a^2 + ab + b^2$. Докажите, что число n представляется в таком же виде.
3. Число $(\sqrt{13} - 1)^{2021}$ представлено в виде $a + b\sqrt{13}$, где a и b – целые числа. Докажите, что a и b делятся на 2^{2020} .
4. Докажите, что 2^n при $n \geq 3$ можно представить в виде $2^n = 7x^2 + y^2$, где x и y – нечетные числа.