

Серия 1(а): простая техника.

1. Уравнение $ax + \frac{c}{x} = b$, в котором коэффициенты a , b и c отличны от нуля, имеет решение. Докажите, что имеет решение и одно из уравнений $ax + \frac{c}{x} = b + 1$ и $ax + \frac{c}{x} = b - 1$.
2. По кругу расставили числа от 1 до 100. Число называется *хорошим*, если оно делится на число, стоящее справа от него. Какое наибольшее количество чисел может оказаться хорошим?
3. Биссектриса угла A равнобедренной трапеции $ABCD$ пересекает основание BC в точке K . Описанная окружность треугольника AKD пересекает сторону AB в точке $L \neq A$. Докажите, что $BL = KC$.
4. Функция $f(x)$, определённая при всех вещественных x и принимающая вещественные значения, удовлетворяет при всех вещественных x и y неравенству $f(x^2 + 2y) \geq f(x^2 + 3y)$. Известно, что $f(100) = 100$. Найдите $f(200)$.
5. На доске написаны два числа: 10^6 и 10^9 . Можно дописать на доску среднее арифметическое двух уже написанных чисел, если это число целое и ещё не было написано ранее. Сколько чисел можно таким образом написать?
6. Найдите все пары натуральных чисел, сумма которых заканчивается на 3, разность является простым числом, а произведение – точным квадратом.
7. Пусть $f(x) = x^3 - x$, $g(x) = x^3 - 3x^2 + 1$. Докажите, что при любых действительных a и b , сумма которых не равна 0, многочлен $af(x) + bg(x)$ имеет три различных действительных корня.
8. Известно, что $ab + bc + ca \geq a + b + c > 0$. Каково наименьшее возможное значение $a + b + c$?
9. Назовем натуральное число *маленьким*, если оно не превосходит 100. Каждому множеству, составленному из 49 маленьких чисел, поставлено в соответствие некоторое маленькое число. Докажите, что можно так выбрать 50 маленьких чисел, что никакому множеству, состоящему из 49 из них, не сопоставлено оставшееся число.
10. Можно ли на координатной плоскости раскрасить все точки с целочисленными координатами в два цвета так, чтобы у любого прямоугольника с раскрашенными вершинами, сторонами, параллельными линиям сетки и площадью, равной степени двойки, нашлись бы вершины обоих цветов?