Серия 1(b): контроль умений.

1. В городе Глупове 6000 школьников писали Единый Глуповский Экзамен, за который можно было получить от 0 до 8 баллов. После проверки всем участникам, набравшим 1, 2 или 3 балла, результат был исправлен на 0 баллов, а всем, у кого было 5, 6 или 7 баллов, поставили 8 баллов (остальные результаты не исправлялись). В результате этих махинаций средний балл всех участников вырос на 0,1 балла. Докажите, что существуют такие целые числа a и b ($0 \leqslant a, b \leqslant 8$), что количество школьников, у которых до махинаций был результат a баллов, и количество школьников, имевших до махинаций результат b баллов, отличаются не меньше чем на 100.

2. В ряд выписано несколько нулей и единиц. Среди любых 200 цифр подряд нулей и единиц поровну, а среди любых 202 цифр подряд – не поровну. Какое наибольшее количество цифр может располагаться в этом ряду?

3. Квадратный трехчлен $2ax^2 + bx + c$ с положительным старшим коэффициентом таков, что каждая из прямых $y = ax + b$, $y = bx + a$, $y = bx + c$, $y = cx + b$, $y = ax + c$, $y = cx + a$ пересекает его график не более чем в одной точке. Какое максимальное значение может принимать величина c/a?

4. В треугольнике ABC продолжения медиан из вершин A и B пересекают описанную окружность в точках A_1 и B_1 соответственно. На стороне AC выбрана точка P, а на стороне BC – точка Q так, что $AP = 2PC$, $BQ = 2QC$. Докажите, что $\angle APB_1 = \angle BQA_1$.

5. У торговцев Пети и Васи было по 30 пирожков. Они начали продавать их по 30 рублей. Если у одного из них покупают пирожок, другой немедленно снижает цену на свои пирожки на один рубль (пирожки продаются только по одному, и такого, чтобы они продавали по пирожку одновременно, не бывает). Сколько денег выручат в сумме Петя и Вася, когда продадут все свои пирожки? (Найдите все варианты и докажите, что других нет.)

6. Даны положительные числа a, b, c, d, не превосходящие 1. Докажите, что произведение каких-то двух из чисел $a - b^2$, $b - c^2$, $c - d^2$, $d - a^2$ не превосходит $1/16$.

7. В тупоугольном треугольнике одну из вершин соединили с точкой на противолежащей стороне и на полученном отрезке, как на диаметре, построили окружность. Докажите, что длина касательной, проведённой к этой окружности из ортоцентра треугольника, не зависит ни от выбора вершины, ни от выбора точки на противолежащей стороне.

8. Из клетчатой доски 2008×2008 вырезали угловую клетку и еще одну, а оставшуюся часть разрезали по границам клеток на два равных многоугольника. В каком месте исходной доски могла находиться вторая вырезанная клетка?

9. Назовем натуральное число n *квазисовершенным*, если сумма всех его натуральных делителей (включая n) равна $2n - 1$. Кроме того, для каждого натурального n обозначим $s(n)$ сумму остатков от деления n на все натуральные числа, меньшие n. Докажите, что n квазисовершенно тогда и только тогда, когда $s(n) = s(n-1)$.

10. Натуральное число n таково, что существуют два натуральных числа, не делящихся на n, сумма, разность и произведение которых делятся на n. Докажите, что n делится на 4.