Серия 2(а), техничная

1. Пусть A – множество действительных чисел, обладающее следующими свойствами: a) $1 \in A$; b) $x \in A \Rightarrow x^2 \in A$; c) $x^2 - 4x + 4 \in A \Rightarrow x \in A$.

Докажите, что $2024 + \sqrt{2023} \in A$.

2. При каких натуральных n существуют различные натуральные числа a, b, c, d такие, что $a^2+b^2+c^2+d^2 = 7\cdot 4^n$?

3. Какое наибольшее значение может иметь разность арифметической прогрессии, среди членов которой есть числа $\frac{1}{11}$, $\frac{1}{13}$, $\frac{1}{17}$?

4. Существует ли бесконечная возрастающая последовательность натуральных чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots$ такая, что для любой возрастающей арифметической прогрессии $b_1, b_2, b_3, \ldots$ с натуральными членами последовательность $a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3, \ldots$ содержит конечное число простых чисел (возможно, ни одного)?

5. Сеня решил квадратное уравнение $2x^2 + bx + c = 0$, а Андрюша уменьшил в этом уравнении каждый из трех коэффициентов на 1 и решил полученное уравнение. Каждый из ребят получил в ответе пару различных чисел, причем Андрюшины числа получаются из Сениных возведением в квадрат. Найдите все возможные пары (b, c).

6. Можно ли разбить все натуральные числа на два множества так, чтобы ни одно из этих множеств не содержало никакой бесконечной арифметической прогрессии?

7. $\{a_n\}$ – последовательность натуральных чисел, $a_1 = 1$, $a_n < a_{n+1} \leqslant 10a_n$. Члены этой последовательности выписали в ряд один за другим. Докажите, что получившаяся последовательность цифр непериодична.

8. Все точки плоскости раскрашены в 2024 цвета. Докажите, что найдётся прямоугольник с вершинами одного цвета.