Серия 2(b): хчл.

1. Даны три квадратных трехчлена с попарно различными старшими коэффициентами. Графики любых двух из них имеют ровно одну общую точку. Докажите, что все три графика имеют ровно одну общую точку.

2. Известно, что модули всех корней уравнений

$$x^2 + Ax + B = 0 \text{ и } x^2 + Cx + D = 0$$

меньше 1. Доказать, что модули корней уравнения

$$x^2 + \frac{A+C}{2}x + \frac{B+D}{2} = 0$$

также меньше 1.

3. Докажите, что не существует квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$ такого, что при любом положительном p оба корня уравнения $ax^2 + bx + c + p = 0$ вещественны и положительны.

4. Приведенный квадратный трехчлен $f(x)$ имеет 2 различных корня. Может ли так оказаться, что уравнение $f(f(x)) = 0$ имеет 3 различных корня, а уравнение $f(f(f(x))) = 0$ – 7 различных корней?

5. Квадратный трехчлен $f(x)$ имеет ровно один корень. Кроме того, уравнение $f(2x-3) + f(3x+1) = 0$ имеет ровно один корень. Найдите корень трехчлена $f(x)$.

6. Пусть $f(x) = x^2 - x + 1$. Докажите, что для любого натурального m числа m, $f(m)$, $f(f(m))$, $\ldots$ попарно взаимно просты.

7. О натуральных числах a и b известно, что $an + 1$ делится на $bn + 1$ при любом натуральном n. Докажите, что $a = b$.

8. Натуральные числа a, b и c таковы, что $\frac{ab}{a-b} = c$. Известно также, что числа a, b и c не имеют общего для них всех натурального делителя, большего 1. Докажите, что $a - b$ есть точный квадрат.