Серия 2(с): заполнение пробелов.

1. Внутри параллелограмма $ABCD$ взяли точку O. Докажите, что $OA < OB + OC + OD$.

2. Докажите, что сумма длин диагоналей выпуклого пятиугольника больше его периметра.

3. $A = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0}$ — натуральное число. Докажите, что $A \equiv a_0 + a_1 + \ldots + a_n \pmod 9$.

4. Докажите, что самый длинный отрезок, содержащийся в треугольнике, – это его наибольшая сторона.

5. Докажите, что

а) каждое натуральное число можно представить в виде суммы степеней двойки с различными целыми неотрицательными показателями,

б) и притом единственным образом.

6. Натуральные числа x, y и n удовлетворяют равенству $\frac{x^2-1}{2} = \frac{y^2-1}{3} = n$. Докажите, что а) n делится на 10, б) $n^2 - 5n$ делится на 700.

7. Докажите, что $1997!! + 1998!!$ делится на 1999. ($n!! = n(n-2)(n-4)\ldots$.)

8. Какое наибольшее число ладей можно поставить на шахматную доску так, чтобы черные не били никого по вертикали, а белые – по горизонтали?