

Серия 3(а), комбинаторная

1. В магическом квадрате $n \times n$, составленном из чисел $1, 2, \dots, n^2$, центры любых двух клеток соединили вектором в направлении от большего числа к меньшему. Докажите, что сумма всех полученных векторов равна нулю. (*Магическим* называется клетчатый квадрат, в клетках которого записаны числа так, что суммы чисел во всех его строках и столбцах равны.)




2. Можно ли покрасить 2023 вершины правильного 2023^2 -угольника в синий цвет и 2023 других вершин в красный цвет так, чтобы расстояние между любыми двумя вершинами синего цвета не совпадало с расстоянием между любыми двумя вершинами красного цвета?

3. Клетки квадрата 50×50 раскрашены в четыре цвета. Докажите, что существует клетка, с четырех сторон от которой (то есть сверху, снизу, слева и справа) имеются хотя бы по одной клетке одного с ней цвета.

4. В парламенте n членов, из числа которых сформированы $n + 1$ комитета, в каждом из которых по 3 человека. Составы двух любых комитетов различны. Докажите, что найдутся два комитета, имеющие ровно одного общего члена.

5. Можно ли все составные натуральные числа, не превосходящие 10^6 , расставить по кругу так, чтобы никакие два соседних числа не были взаимно просты?

6. В стране 1993 города, и из каждого выходит не менее 93 дорог. Известно, что из любого города можно проехать по дорогам в любой другой. Докажите, что это можно сделать не более чем с 62 пересадками. (Дорога соединяет между собой два города.)

7. Прямоугольник 2023×2024 разрезан на фигурки видов ,  и . Какое наибольшее количество фигурок может быть в разрезании?

8. На плоскости проведено 12 прямых, никакие две из которых не параллельны. Какое наибольшее число равнобедренных треугольников со сторонами, лежащими на этих прямых, могло образоваться?