

Серия 3, арифметическая

1. Определим числа Фибоначчи равенствами $F_1 = F_2 = 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. Докажите, что $F_1 + F_2 + \dots + F_n = F_{n+2} - 1$.
2. (Неравенство Бернулли). Докажите, что $(1 + x)^n > 1 + nx$ при всех натуральных $n > 1$, если а) $x > 0$; б) $x > -1$, $x \neq 0$.
3. На плоскости лежат n прямых, разбивающих ее на части. Докажите, что эти части можно закрасить в 2 цвета правильным образом, то есть так, чтобы любые две части, граничащие по отрезку, были закрашены в разные цвета.
4. а) Можно ли расставить по кругу все цифры от 0 до 9 так, чтобы из каждой двух цифр, стоящих рядом, можно было составить двузначное число, кратное 7? (Например, рядом с единицей может стоять двойка, потому что 21 делится на 7, но не может стоять тройка, потому что ни 23, ни 32 на 7 не делятся.)
б) Какое наибольшее количество разных цифр можно расставить по кругу таким образом?
5. При каком наименьшем натуральном n число $n!$ делится на 2024?
6. Хулиган Вася составил арифметический ребус, в котором цифры заменены буквами: $АБ \times ВГ = ДДЕЕ$. Докажите, что Вася ошибся при умножении.
7. Натуральное число M состоит из 1980 единиц и 1983 двоек, а остальные цифры – нули. Может ли это число быть точным кубом?
8. $x^2 + y^2 = z^2$. Докажите, что xuz делится а) на 5, б) на 60.