Серия 4(а), слегка периодинческая

1. На плоскости отмечены вершины правильного 2003-угольника. Докажите, что количество 20-угольников с вершинами в отмеченных точках, содержащих центр исходного 2003-угольника, делится на 13.

2. В ряд выписаны натуральные числа от 1 до 100 в некотором порядке. Какое наименьшее значение может принимать максимальная сумма десяти чисел, стоящих подряд?

3. Дана бесконечная десятичная дробь, причем после запятой у нее встречаются только цифры 0, 1, 2. Известно, что если все цифры 0 заменить на 1, то получится периодическая десятичная дробь (возможно с предпериодом), и если все цифры 1 заменить на 2, то тоже получится периодическая десятичная дробь. Следует ли отсюда, что исходная дробь периодическая?

4. Последовательность a_1, a_2, a_3, …задается правилами: $a_{2n} = a_n$ при $n \geqslant 1$ и $a_{4n+1} = 1$, $a_{4n+3} = 0$ при $n \geqslant 0$. Докажите, что эта последовательность не имеет периода.

5. Натуральные числа S, p и q таковы, что $S \equiv 0 \pmod q$, $S \equiv 1 \pmod p$, $q > p$ и $S \leqslant pq$. Докажите, что $S \leqslant pq - \frac{q(p-1)}{q-p}$.

6. Бесконечная арифметическая прогрессия, состоящая из натуральных чисел, содержит квадрат натурального числа и куб натурального числа. Докажите, что она содержит шестую степень натурального числа.

7. Конечное множество S натуральных чисел, больших 1, обладает следующим свойством: для любого натурального n в множестве S найдется либо число, взаимно простое с n, либо делитель числа n. Докажите, что в множестве S либо найдется простое число, либо найдутся два числа, имеющих простой наибольший общий делитель

8. Дано натуральное число a. Для каждого натурального n положим $x_n = a^n + a^{n-1} - 1$. Докажите, что из последовательности $\{x_n\}$ можно выбрать бесконечную подпоследовательность, все члены которой попарно взаимно просты.