Серия 4(b): повторение и арифметика.

1. Натуральное число n обладает следующим свойством: для любых натуральных a и b число $(a+b)^n-a^n-b^n$ делится на n. Докажите, что a^n-a делится на n для любого натурального a.

2. Дан выпуклый 100-угольник $A_1A_2\dots A_{100}$. Его разбили на треугольники не пересекающимися по внутренним точкам диагоналями. Докажите, что эти треугольники можно единственным образом занумеровать числами 1, 2, …, 98 таким образом, чтобы каждый треугольник с номером i содержал вершину A_i.

3. Для каждого натурального n обозначим u_n наибольшее простое число, не превосходящее n, а v_n – наименьшее простое число, большее n. Докажите, что $\frac{1}{u_2v_2}+\frac{1}{u_3v_3}+\frac{1}{u_4v_4}+\ldots+\frac{1}{u_{100}v_{100}}=\frac{99}{202}$.

4. Натуральные числа a, b и $n>1$ таковы, что $(a+b)^n$ делится на ab. Докажите, что a^{n-1} делится на b.

5. На доске написано натуральное число. Каждую секунду к числу на доске прибавляют его максимальный простой делитель. Докажите, что когда-нибудь это число будет делиться на 2024.

6. Обозначим через $d(n)$ количество натуральных делителей числа n. Докажите, что $d(ab)\geqslant d(a)+d(b)-1$ для любых натуральных a и b.

7. a и b – различные натуральные числа, большие 1, такие, что a^2+b-1 делится на b^2+a-1. Докажите, что число b^2+a-1 имеет хотя бы два различных простых делителя.

8. Решите в целых числах уравнение $x(1+x+x^2)=4y(y+1)$.