

### Серия 5(а), пограничная

1. Докажите, что данное а) натуральное, б) целое число  $A$  является точным квадратом тогда и только тогда, когда для каждого натурального  $n$  хотя бы одна из разностей

$$(A + 1)^2 - A, (A + 2)^2 - A, (A + 3)^2 - A, \dots, (A + n)^2 - A$$

делится на  $n$ .

2. Натуральное число  $m$  не делится ни на 2, ни на 3. Докажите, что для некоторого  $n$  число  $2^n + 3^n + 6^n - 1$  кратно  $m$ .

3. По законам страны Анчурии телефонные номера всех абонентов должны состоять из 10 ненулевых цифр, а у любых двух абонентов номера должны различаться хотя бы в двух цифрах, либо ровно в одной цифре, но хотя бы на 2. Какое наибольшее количество телефонных номеров может быть в Анчурии?

4. Назовём натуральное число *невысоким*, если в его десятичной записи встречаются только цифры 0, 1 и 2. Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел, которые нельзя представить в виде суммы невысокого числа и точного квадрата.

5. Марсианин рождается в полночь и живет ровно 100 суток. Известно, что за всю историю вымершей ныне марсианской цивилизации родилось нечетное число марсиан. Докажите, что было по крайней мере 100 дней, когда число жителей Марса было нечетным.

6. Бесконечную в обе стороны последовательность назовём *последовательностью фибоначчиева типа*, если каждый её член равен сумме двух предыдущих. Сколько существует различных последовательностей фибоначчиева типа, в которых есть два соседних натуральных члена, не превосходящих  $N$ ? (Последовательности, отличающиеся сдвигом номеров, мы различными не считаем.)

7. Функции  $f(x)$  и  $g(x)$  определены на множестве целых чисел, не превосходящих по модулю 1000. Обозначим через  $m$  число пар  $(x, y)$ , для которых  $f(x) = g(y)$ , через  $n$  – число пар, для которых  $f(x) = f(y)$ , а через  $k$  – число пар, для которых  $g(x) = g(y)$ . Докажите, что  $2m \leq n + k$ .

8. Существует ли бесконечная последовательность, составленная из цифр 0, 1, ..., 9, на любом отрезке которой какая-нибудь цифра встречается нечетное число раз?