Серия 5(b): перемена рода деятельности.

1. В графстве Липшир 2025 усадеб. Некоторые из них соединены дорогами. Часть дорог – асфальтированные, а остальные – грунтовые. Известно, что из каждой усадьбы выходят ровно 2 дороги. Докажите, что есть усадьба, из которой выходят две дороги одинакового типа.

2. В некоторой стране из любого города можно перелететь в любой другой (возможно, с пересадками), и какие бы четыре города мы не взяли, среди них найдутся два, соединенных авиалинией. Докажите, что из любого города можно перелететь в любой другой, сделав не более четырех пересадок.

3. В селе Ивановском живут $n > 100$ человек. Житель села называется общительным, если у него не менее 100 знакомых среди односельчан. Докажите, что в Ивановском найдутся либо два знакомых между собой общительных жителя, либо два незнакомых между собой необщительных жителя.

4. В графстве n усадеб, каждые две из которых соединены дорогой. Эксцентричный джентльмен, которого назначили начальником ГАИ графства, решил установить на всех дорогах одностороннее движение так, чтобы, выехав из какой-либо усадьбы, в нее больше нельзя было вернуться.

а) Докажите, что он может это сделать.

б) Сколькими способами он может осуществить свое намерение?

5. В волейбольном однокруговом турнире участвовало 2^n команд. Докажите, что после окончания турнира можно выбрать $n+1$ команду A_1, A_2, $\ldots$, A_{n+1} так, чтобы каждая из них выиграла у всех команд с бо́льшими номерами.

6. С натуральным числом, написанным на доске, разрешается проделать такую операцию: умножить его на выражение $(p-1)^2/p$, где p – его простой делитель, и записать результат вместо исходного числа. Докажите, что, какое бы исходное число мы ни взяли и как бы мы ни проделывали описанные операции, на доске рано или поздно появится число 1.

7. Дано простое $p > 5$. Докажите, что существуют два разных натуральных числа x, $y < \sqrt{p}$ таких, что $p - x^2$ делится на $p - y^2$.

8. В клетках таблицы $n \times n$ расставлены ладьи. Известно, что, если на какой-нибудь клетке ладьи нет, то на клетках, стоящих по вертикали и по горизонтали, которые содержат эту клетку, стоит (всего) не менее n ладей.

Докажите, что общее число ладей в таблице не менее $\frac{n^2}{2}$.